



TITLE:

Tangle と 2-variable polynomial(グラフ理論と3次元多様体)

AUTHOR(S):

児玉, 宏児

CITATION:

児玉, 宏児. Tangle と 2-variable polynomial(グラフ理論と3次元多様体).
数理解析研究所講究録 1985, 575: 147-155

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99233>

RIGHT:

Tangle と 2-variable polynomial

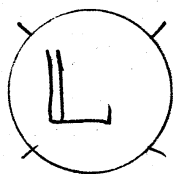
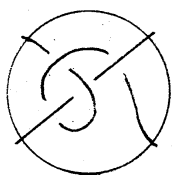
北大・理 児玉 宏児 (Kodama Kouzi)

向きづけられた link の polynomial に対応する Tangle の polynomial を定義し Tangle の操作についての性質と link の polynomial との関係を見る。また Link を code 付の graph に対応させた時の polynomial の性質を見る。

§ 0. まずは準備から――

Def. Tangle: disk 上の proper な 2 本の arcs と 0 本以上の loops による diagram. arcs の端点は、右上、右下、左上、左下に出るようにする。一般の Tangle を示す時には Tangle の置き方を示すために文字 “ \cap ” を書く。

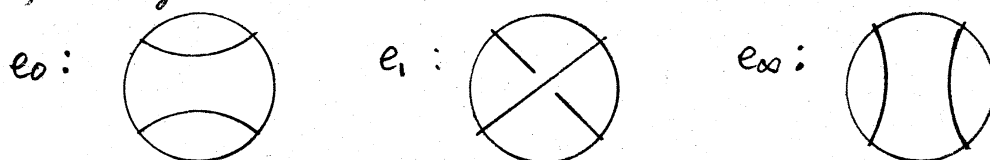
例.



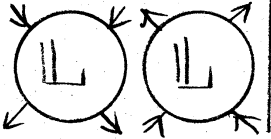
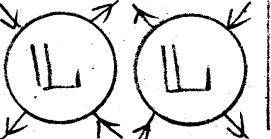
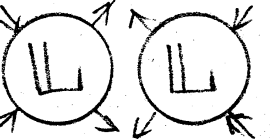
こんな具合に

境界を止めたまま内部の isotopy で移り合うものは同じ Tangle と見なすことにする。

Def. tangle e_0, e_1, e_∞ を次の様に定める



Tangle の各 arcs と loops に向きを入れて考える。この時 Tangle の4つの端点での向きの入り方は次の3つの type。

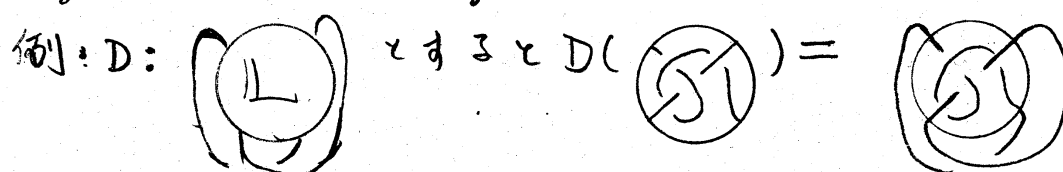
orientation type	\oplus type	\ominus type	\oplus type
Tangle			

各 orientation type の Tangle の集合を $\mathcal{T}_\pm, \mathcal{T}_\mp, \mathcal{T}_\pm$ と書く。

特に問題がなければ ori. type は明示せず単に \mathcal{T} と書く。

Def. $D: \mathcal{T} \rightarrow \{\text{link diagram}\}$ が diagram construction

① の部分が空白になっ ている link diagram に与えられた tangle をはめ込んで diagram を完成させる。



☆ $\Lambda = \mathbb{Z}\langle x, y, z \rangle$ 変数 x, y, z の Laurent polynomial 環

Def. oriented link の polynomial

link L の polynomial $Q_L \in \Lambda$ を diagram の交点の近くでの変形に戻して次の様にする。

$$x Q_{L+} - y Q_{L-} = z Q_{Ls}$$

$$L_+ : \nearrow \quad L_- : \nwarrow \quad L_s : \searrow \nearrow$$

また, k -component trivial link) に対しては

$$Q_L = \left(\frac{x-y}{z} \right)^{k-1}$$

§ 1. Tangle の polynomial — 本題に入ります —

Def. oriented tangle T に対し $P(T) = (e \wedge x \wedge x \wedge y \text{ 項式の三つ組})$
を交点の近々 T の変形に対して次の様にとる.

$$x P(T_+) - y P(T_-) = z P(T_s)$$

$$T_+ : \nearrow \quad T_- : \nwarrow \quad T_s : \searrow \nearrow$$

また, e_0, e_1, e_∞ の各 tangle に対して.

$$P(e_0) = (1, 0, 0), \quad P(e_1) = (0, 1, 0), \quad P(e_\infty) = (0, 0, 1)$$

★ $P(T)$ の成分を先頭から $P_0(T), P_1(T), P_\infty(T)$ と書く.

Prop. 1

(i) $P(T)$ は well defined

(ii) T の ori. type

$$\pm \Rightarrow P_0(T) = 0$$

$$= \Rightarrow P_1(T) = 0$$

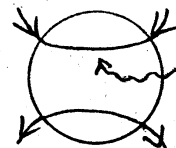
$$\mp \Rightarrow P_\infty(T) = 0$$

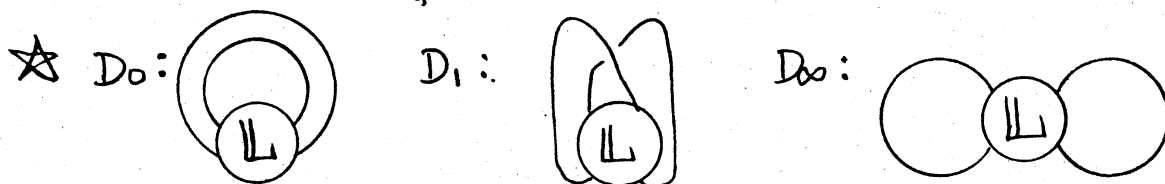
(iii) D : diagram construction

$$Q_D(T) = P_0(T) Q_D(e_0) + P_1(T) Q_D(e_1) + P_\infty(T) Q_D(e_\infty)$$

注. (i) $e_0 \oplus$, $e_1 \ominus$, $e_\infty \oplus$ は実際にはない。(iii)の $QD(e_0 \oplus)$.

$QD(e_1 \ominus)$, $QD(e_\infty \oplus)$ は形式的に書いてある。

例, e_0, \oplus type  向きがつけようがない



$$\delta: \frac{x-y}{x} \quad \text{とすると}$$

$$QD_0(T) = \delta P_0(T) + P_1(T) + P_\infty(T)$$

$$QD_1(T) = P_0(T) + \delta P_1(T) + P_\infty(T)$$

$$QD_\infty(T) = P_0(T) + P_1(T) + \delta P_\infty(T)$$

Tori. type

$$\ominus \text{ or } \oplus$$

$$\oplus \text{ or } \oplus$$

$$\oplus \text{ or } \ominus$$

上の三つの式は $P_0(T)$, $P_1(T)$, $P_\infty(T)$ に関して独立になっている。

Tangle の Polynomial として P_0 , P_1 , P_∞ の三つ組の代わりに

QD_0 , QD_1 , QD_∞ の三つ組を用いても良いことが分かる。

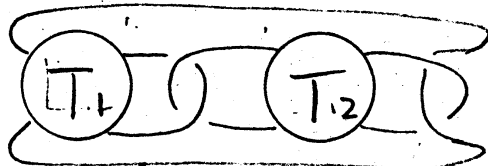
上式はこの変換式と見なせる。(OK?)

Prop. 2 $D: \underbrace{\mathcal{T} \times \dots \times \mathcal{T}}_{n \text{ 個}} \rightarrow \text{link diagram}$ とすると

$$QD(T_1, \dots, T_n) = \sum_{t_1, \dots, t_n = 0, 1, \infty} P_{t_1}(T_1) \dots P_{t_n}(T_n) QD(e_{t_1}, \dots, e_{t_n})$$

例, $n=2$

$$D(T_1, T_2) =$$



各々の tangle に関して Prop. 1(iii) に従って書き下せば良い。

Def. *tangle* の operation を定義する。

(1) σ : 左上と右下を結ぶ対角線を軸に π 回転

$$T = \text{disk with } \text{⌌} \text{ (disk 上に "⌌" が書かれていると思っ、て、)}$$

$\sigma \downarrow$ (σ を作用させると...)

$$T_\sigma = \text{disk with } \text{⌍} \text{ (← こうなってしまう。)}$$

(2) τ : 平面上で π 回転

$$T = \text{disk with } \text{⌌} \xrightarrow{\tau} \text{disk with } \text{⌍} = T_\tau$$

(3) $!$: 縦面に関する reflection

$$T = \text{disk with } \text{⌌} \xrightarrow{\text{各交点で}} \text{disk with } \text{⌍} = T!$$

(4) $+$: 2 つの *tangle* を横に並べてつなぐ

$$T_1 + T_2 = \text{disk with } \text{⌌} \text{ and } \text{⌍} \text{ side-by-side}$$

注) ① σ, τ は 2 面体群 D_4 を生成する

② $!$ と D_4 の元的作用は可換になっている。

$$\text{i.e. } x \in D_4. (Tx)! = (T!)x$$

③ $!$ と D_4 の元的作用を $+$ に優先させることにする

④ Conway の operation との対応は次の様になる。

$$(T_1, T_2) = \text{disk with } \text{⌍} \text{ and } \text{⌌} = T_1 \sigma! + T_2$$

$$T_+ = \text{disk with } \text{⌌} = (T_\sigma + e_1!) \sigma$$

$$T_- = \text{disk with } \text{⌌} = (T_\sigma + e_1) \sigma$$

これらの操作の結果ともとの *tangle* との対応から *polynomial* を評価する。

Prop. 3 $T, T_1, T_2: \text{tangle}$

① $x \in D_4$

$$P(Tx) = \sum_{t=0,1,\infty} P_t(T) P(e_t x)$$

$$\textcircled{2} P(T!) = \sum_{t=0,1,\infty} P_t(T)(y, x, -x) P(e_t !)$$

$$\textcircled{3} P(T_1 + T_2) = \sum_{t_1, t_2=0,1,\infty} P_{t_1}(T_1) P_{t_2}(T_2) P(e_{t_1} + e_{t_2})$$

σ は水平軸中心の π 回転、 τ は垂直軸中心の π 回転、 τ^2 は線面上の π 回転。これらを e_0, e_1 , 及び e_∞ に作用させても同じ *tangle* (arcに入る向きが逆になる程度) となるので

Prop. 4 $T, T_1, T_2: \text{tangle}$

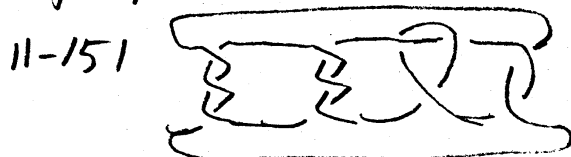
$$(1) P(T) = P(T\sigma\tau) = P(T\tau\sigma) = P(T\tau^2)$$

$$P(T_1 + T_2) = P(T_2 + T_1)$$

(2) (1) を用いると

$$QD(T) = QD(T\sigma\tau) = QD(T\tau\sigma) = QD(T\tau^2)$$

例. 11-151 と 11-152 は同じ *polynomial* を持つ

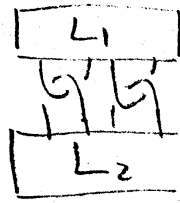


== が入れかわっている

例 $L = L_1 \cup L_2$: link

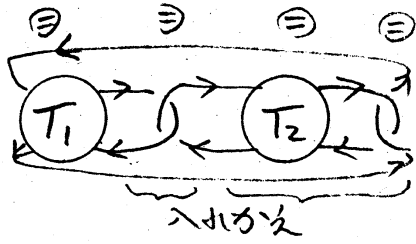
(1) $lk(L_1, L_2) = 0$ か、 (2)

$\Rightarrow Q L_1 \cup L_2 = Q L_1 \cup -L_2$

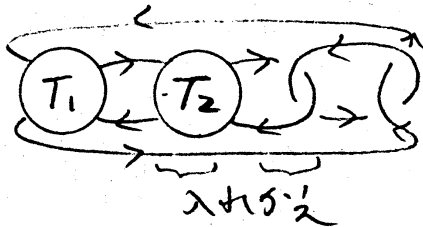
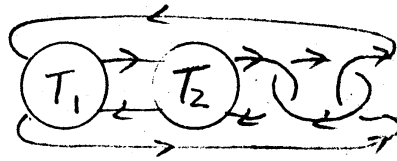


にんた集合いた
2ヶ所て引、掛
か、ていさて...

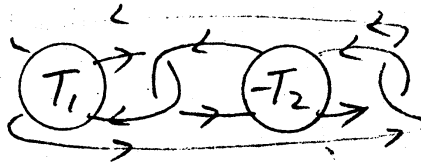
i.e. 一方の orientation を逆にしても polynomial は不変



\rightarrow
 \sim



\rightarrow



§ 2. Link の graph (graph との対応についても少々)

Def. oriented link diagram の graph

link diagram L が分ける S^2 の領域を 2 色に塗り分け、一方の色の領域について、各領域に graph の頂点、領域をつなぐ diagram の交点には辺を対応させる。各辺には次の様にして、

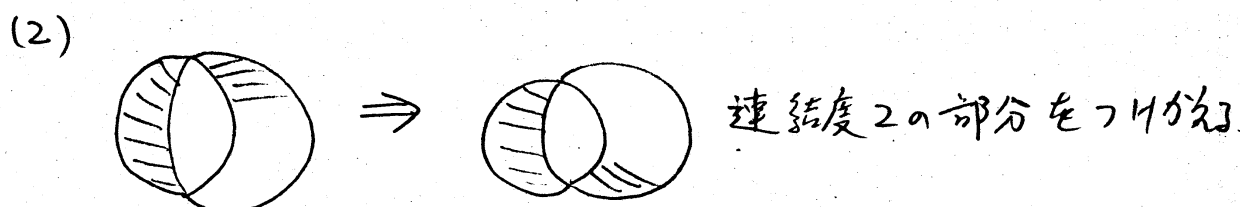
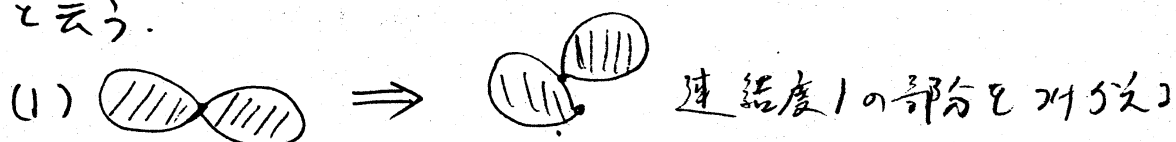
sign と code をつける。

sign : $\nearrow \searrow \Rightarrow +1$ $\nwarrow \nearrow \Rightarrow -1$

code : $\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{ or } \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \Rightarrow a$ $\begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \end{array} \text{ or } \begin{array}{c} \nwarrow \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow b$

Def. 2-isomorphic

次の操作を有限回行なうと移り合う2つの graph を 2-isomorphic と云う.



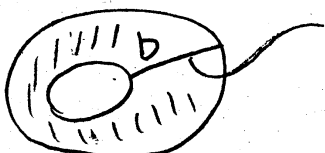
Prop. 5

(1) $G (\hookrightarrow S^2)$ signed coded graph が link の graph \Leftrightarrow

(a) 各 vertex のまわりで a の code の edge は 偶数個

 self loop は 2個と見る

(b) $S^2 - G$ の各領域から見て b の code の edge は 偶数個

 この様な所は 2個と見る



(2) = の時. link diagram と graph は link の ori, reversing と graph の dual (sign はそのまゝ code は a, b と交換) を除いて一意に対応がつけられる

(2) は link と graph の対応から明らか. (1) は graph の各辺での link との対応が全体として矛盾しないことを見れば OK.

= の対応で link の polynomial は signed coded graph $G (\hookrightarrow S^2)$ の polynomial と見なせる (もちろん G が link と対応する時だけ)

また link diagram の Reidemeister moves に対したの graph の変化では当然 polynomial は不変となる。

ここで、Th. 4.12) の意味を \equiv の graph 上で考えよう。

$G \hookrightarrow S^2$ の embedding の差と 2-isotopy の差は connected sum された link の diagram の作り方 ( の所) の差
 又は Th. 4.2 に示される tangle の回転 ( の所)
 と対応がつく。graph の embedding も
 変えても、2-isotopy だけ変化させても link に対した、しかも、
 polynomial は不変なことが分かる。